

Übungsblatt 9

Gruppenwirkungen und Hauptfaserbündel

33. Quotienten topologischer Gruppen.

Es seien G eine topologische Gruppe und A, B Teilmengen von G . Wir definieren $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ und $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$. Eine Teilmenge $A \subset G$ heisst symmetrisch, falls $A = A^{-1}$. Zeigen Sie, daß gilt:

- (a) (1 Punkt) Die symmetrischen Umgebungen des neutralen Elements $e \in G$ bilden eine Basis $\mathcal{B}$ von Umgebungen von e , d.h. jede Umgebung von $e \in G$ enthält ein Element aus $\mathcal{B}$ und jedes Element aus $\mathcal{B}$ ist eine Umgebung von e .
- (b) (1 Punkt) Es sei $g \in G$ und U eine Umgebung von g in G . Dann gibt es eine symmetrische Umgebung V von e , so daß $VgV^{-1} \subset U$.
- (c) (1 Punkt) Es sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe von G . Dann ist der Raum G/H der Linksnebenklassen von H in G bezüglich der Quotiententopologie der kanonischen Projektion $\pi : G \rightarrow G/H$ ein Hausdorff-Raum. Weiter ist π offen und stetig.
- (d) (1 Punkt) Es sei $H \subset G$ ein abgeschlossener Normalteiler von G . Dann ist G/H eine topologische Gruppe bezüglich der Quotiententopologie.

34. Quotienten von Gruppenwirkungen.

- (a) (2 Punkte) Es sei G eine kompakte topologische Gruppe, die auf einem topologischen Hausdorff-Raum X wirkt, und G_x die Isotropiegruppe von $x \in X$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\phi : G/G_x \rightarrow Gx, gG_x \mapsto g(x)$ ein Homöomorphismus ist.
- (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß $O(n+1)/O(n)$ homöomorph zur Sphäre S^n ist, ebenso daß $\mathbb{RP}^n$ homöomorph zu $O(n+1)/(O(n) \times O(1))$ ist.

35. Hauptfaserbündel.

Es sei $P \rightarrow M$ ein Faserbündel mit Strukturgruppe G und Faser $F = G$. P heisst dann Hauptfaserbündel.

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß eine Gruppenwirkung $F \times G \rightarrow F$ durch Multiplikation von rechts existiert, die transitiv und frei ist. Eine Gruppenwirkung heisst frei, falls für alle $p \in P$ gilt: Wenn es $g_1, g_2 \in G$ mit $pg_1 = pg_2$ gibt, dann ist $g_1 = g_2$.
- (b) (2 Punkte) Es sei H eine abgeschlossene Untergruppe einer Liegruppe G . Wir definieren die Wirkung $G \times H \rightarrow G, (g, h) \rightarrow gh$. Zeigen Sie, daß $\pi : G \rightarrow G/H, g \rightarrow [g] = \{gh | h \in H\}$ ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe H ist.
- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $\pi : O(n+1) \rightarrow S^n$ ein Hauptfaserbündel mit Faser $O(n)$ ist.

36. Die Hopf-Faserung.

- (a) (1 Punkt) Wir definieren den komplex projektiven Raum $\mathbb{CP}^n$ analog zum reell projektiven Raum in Aufgabe 11, indem wir überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen. Da die Übergangsabbildungen $\psi_{ji} = \frac{z_j}{z_i}$ holomorph sind, ist $\mathbb{CP}^n$ eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n (und somit auch eine reelle Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$.) Zeigen Sie, daß gilt: $\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$.
- (b) (3 Punkte) Es sei $S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 | |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf S^3 wie folgt: $(z_0, z_1) \sim (w_0, w_1)$ genau dann, wenn $(z_0, z_1) = (\lambda w_0, \lambda w_1)$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$. Es sei $B = S^3 / \sim$ und $\pi : S^3 \rightarrow B$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie, daß $B \simeq \mathbb{CP}^1$ und daß $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ ein Hauptfaserbündel mit Faser $S^1 \simeq U(1)$ ist. Dieses Faserbündel heisst Hopf-Faserung von S^3 .

Abgabetermin: Freitag, 1. 7. 2010 um 10:00 Uhr.